УДК 517.9

На правах рукописи

Брычев Сергей Викторович

ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ ВЫРОЖДЕННЫХ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

01.01.02. – дифференциальные уравнения

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

ЕКАТЕРИНБУРГ – 2000

Работа выполнена в Челябинском государственном университете на кафедре математического анализа.

Научный руководитель	доктор физико-математических наук, профессор Г.А.Свиридюк
Официальные оппоненты	доктор физико-математических наук, профессор С.Т. Завалищин
	кандидат физико математических наук, доцент Т.Г. Сукачева
Ведущая организация	Воронежский государственный университет

Защита состоится "27" декабря 2000 года в 15 ч. 00 мин. на заседании Диссертационного совета К 063.78.03 по присуждению ученой степени кандидата физико-математических наук в Уральском государственном университете имени А.М.Горького по адресу:

620083, Екатеринбург, просп. Ленина, 51, комн.248.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Уральского государственного университета.

Автореферат разослан "24" ноября 2000 г.

Ученый секретарь Диссертационного совета
кандидат физико-математических
наук, доцент В.Г. Пименов

Цель работы. Пусть $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ – конечномерные банаховы пространства, $\dim\mathfrak{U} = \dim\mathfrak{F}$, операторы $L, M \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$. Поставим задачу Коши

$$u(0) = u_0 \tag{1}$$

для линейного операторного уравнения соболевского типа

$$L\dot{u} = Mu + f, \quad \ker L \neq \{0\}. \tag{2}$$

Если в пространствах $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ фиксировать некоторые базисы, то операторам L и M можно поставить в соответствие квадратные матрицы L и M порядка $\dim\mathfrak{U}$, а уравнению – вырожденную (т.е. $\det L = 0$) линейную систему обыкновенных дифференциальных уравнений.

Целью диссертации является построение численного алгоритма для решения задачи (1), (2) и разработка экономических приложений системы уравнений (2). Отправными точками послужили теория относительно σ-ограниченных и относительно p-радиальных операторов и вырожденных аналитических и сильно непрерывных групп операторов, разработанная Г.А. Свиридюком и В.Е. Федоровым, и динамическая модель межотраслевого баланса В. Леонтьева "затраты-выпуск" с учетом запасов.

Актуальность темы. Как хорошо известно, первые результаты о разрешимости однородного (т.е. $f \equiv 0$) уравнения (2) были получены Ф.Р. Гантмахером. Основываясь на общей теории пучков матриц $\mu L - M$, где L и M – произвольные прямоугольные матрицы одних и тех же размеров, разработанной К. Вейерштрассом и Л. Кронекером, Ф.Р. Гантмахер дал исчерпывающий ответ о решениях однородной системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

Именно эти результаты легли в основу работ С.Г. Крейна и его учеников, в которых изучена задача (1) для однородного уравнения

$$L\dot{u} = Mu, \quad \ker L \neq \{0\} \tag{3}$$

в бесконечномерных банаховых пространствах при условии фредгольмовости оператора (т.е. $\operatorname{ind} L = 0$). Независимо от этих результатов М.И. Вишик предложил свой подход к решению задачи (1), (3). Однако ввиду большой технической сложности методы работ до сих пор не превратились в численные алгоритмы.

С другой стороны, предположим, что национальная экономика некоторой страны состоит из n отраслей, и пусть a_{ij} представляет собой коэффициент затрат, показывающий количество единиц продукции отрасли i, необходимое для производства единицы продукции отрасли j. Тогда взаимосвязи между валовыми выпусками $x_1, x_2, \dots x_n$ n отраслей экономики и так называемым конечным спросом, включающим в себя потребление и новые инвестиции, удовлетворяют следующей системе

$$(\mathbb{I} - A)x = y. \tag{4}$$

Система (4) в экономической литературе получила название "система Леонтьева "затраты-выпуск"". Для исследования динамики зависимости валового выпуска от конечного спроса В. Леонтьевым была предложена модифицированная система

$$(\mathbb{I} - A)x - B\dot{x} = y. \tag{5}$$

Здесь B – квадратная матрица того же порядка, что и матрица A. Элемент b_{ij} матрицы B представляет собой запас продукции отрасли i, требуемый для производства единицы продукции отрасли j. Поэтому компоненты вектора $B\dot{x}$ описывают скорость прироста всех видов запасов, т.е. скорость накопления или свертывания всех видов капитала в их взаимосвязи с изменениями скоростей выпуска $\dot{x}$ всех отраслей. Система уравнений (5) была названа "системой Леонтьева "затраты-выпуск" с учетом запасов" или "динамической моделью Леонтьева" в отличие от "стационарной модели Леонтьева" (4). Уравнения Леонтьева (4) и (5) стали объектом многих глубоких как теоретических, так и прикладных исследований. В этой области укажем на работы М.Моришимы, Ш. Хошимуры и др.

В свою очередь уравнение (2) является объектом пристального внимания многих математиков. Интересные результаты были получены Н.В.Зубовым и В.Ф. Чистяковым. Ю.Е. Бояринцев предложил приближенные методы решения вырожденных систем обыкновенных дифференциальных уравнений, основанные на использовании обобщенных обратных матриц.

Особое место в этом кратком обзоре занимают работы Г.А. Свиридюка и Г.А. Свиридюка и Т.Г. Сукачевой, в которых метод фазового пространства применяется к исследованию задачи (1), (2) при условии, что вектор-функция $f = f(u)$. При некоторых дополнительных условиях на вектор-функцию f показано, что фазовым пространством уравнения (2) является гладкое C^∞-многообразие.

В заключение отметим, что важность и необходимость изучения уравнений вида (2), (3) отмечали И.Г. Петровский и Ж.-П. Лионс.

Методы исследования. Основным методом наших исследований является *метод фазового пространства*. Суть его вкратце сводится к следующему. Сингулярное уравнение (3) редуцируется к регулярному

$$\dot{u} = Su, \tag{6}$$

определенному однако не на пространстве $\mathfrak{U}$, а на некотором его подмножестве $\mathfrak{P} \subset \mathfrak{U}$, понимаемом нами как *фазовое пространство* исходного уравнения (3). Затем ищется разрешающая (полу)группа уравнения (6), которая оказывается разрешающей (полу)группой уравнения (3). Вырожденные аналитические группы и вырожденные сильно непрерывные полугруппы обладают рядом свойств, решительно отличающих их от прототипов. Поскольку в конечномерном случае группы и полугруппы совпадают, то мы воспользуемся свойствами тех и других для создания численного алгоритма решения задачи.

Новизна полученных результатов. Основным результатом диссертации следует считать построение численного алгоритма решения задачи (1), (2), основанного на теории относительно σ-ограниченных и относительно p-радиальных операторов и вырожденных аналитических групп операторов. По численному алгоритму создан программный продукт для расчета экономики коммунального хозяйства малых городов по заказу администрации города Еманжелинска. Созданные программы могут быть тиражированны для других малых городов России.

Теоретическая и практическая значимость. Теоретическая значимость полученных результатов заключается в разработке численного алгоритма для решения задач вида (1), (2). Практическая значимость заключается в том, что полученный алгоритм был применен к расчету экономики коммунального хозяйства г. Еманжелинска.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались на конференции "Дифференциальные и интегральные уравнения" (Одесса, 2000), на Четвертом сибирском конгрессе по прикладной и индустриальной математике, ИНПРИМ-2000 (Новосибирск, 2000), на Воронежских зимней (Воронеж, 1999) и весенней (Воронеж, 1999) математических школах, на семинаре факультета экономики и финансов ЧелГУ и на семинаре проф. Г.А. Свиридюка.

Публикации. По теме диссертации опубликованно 6 работ, список которых приводится в конце автореферата. Результаты, вошедшие в диссертацию получены автором.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трех глав и списка литературы. Объем диссертации составляет 97 страниц. Библиография содержит 106 наименований работ российских и зарубежных авторов.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении обосновывается актуальность темы исследования, определяется цель работы, дается обзор литературы по исследуемой проблематике, кратко излагаются основные результаты диссертации. В заключение введения автор выражает признательность научному руководителю, главе администрации г. Еманжелинска Ю.Я. Горбунову, коллективу кафедры математического анализа ЧелГУ, своим родителям Наталье Григорьевне и Виктору Владимировичу и своей жене Наташе.

В первой главе содержится адаптация теории относительно операторов и вырожденных аналитических групп операторов в конечномерной ситуации. Сразу отметим, что термин "(L,σ)-ограниченный оператор" заменен на термин "относительно регулярный оператор". Пусть $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ – конечномерные линеалы, $\dim\mathfrak{U} = \dim\mathfrak{F}$, операторы $L, M \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$.

В п.1.1 рассматриваются свойства относительных резольвент, устанавливается их аналитичность и вырожденность.

Определение 1 Множество

$$\rho^L(M) = \{\mu \in \mathbb{C} : (\mu L - M)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F};\mathfrak{U})\}$$

называется *резольвентным множеством* оператора M *относительно* оператора L (короче, *L-резольвентным множеством* оператора M).

Множество $\sigma^L(M) = \mathbb{C}\backslash\rho^L(M)$ называется *спектром* оператора M *относительно* оператора L (короче, *L-спектром* оператора M).

Лемма 1 *Справедливо только одно из следующих утверждений:*

(i) либо $\sigma^L(M) = \mathbb{C}$;

(ii) либо L-спектр оператора M состоит из конечного множества точек.

В п.1.2 рассматриваются свойства относительно регулярных операторов.

Определение 2 Оператор M называется *регулярным относительно* оператора L (короче, *L-регулярным*), если $\rho^L(M) \neq \emptyset$.

Пусть оператор M L-регулярен, а контур $\Gamma = \{\mu \in \mathbb{C} : |\mu| = r\}$ ограничивает область, содержащую L-спектр оператора M. Тогда интегралы *типа Ф. Рисса*

$$P = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} R^L_\mu(M)d\mu, \quad Q = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} L^L_\mu(M)d\mu. \tag{7}$$

являются проекторами. Положим $\mathfrak{U}^0 = \ker P$, $\mathfrak{F}^0 = \ker Q$; $\mathfrak{U}^1 = \operatorname{im} P$, $\mathfrak{F}^1 = \operatorname{im} P$. Обозначим через L_k (M_k) сужение оператора L (M) на $\mathfrak{U}^k$, $k = 0, 1$.

Теорема 1 *Пусть оператор M L-регулярен. Тогда*

(i) имеет место действие операторов $L_k, M_k : \mathfrak{U}^k \to \mathfrak{F}^k$, $k = 0, 1$;

(ii) существует оператор $M_0^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^0; \mathfrak{U}^0)$;

(iii) существует оператор $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^1; \mathfrak{U}^1)$;

В п.1.3 изучаются относительно присоединенные векторы Пусть оператор M L-регулярен. Тогда из теоремы 1 вытекает существование операторов $H = M_0^{-1}L_0 \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^0)$ и $S = L_1^{-1}M_1 \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^1)$, посредством которых можно разложить L-резольвенту оператора M в *ряд Лорана*

$$(\mu L - M)^{-1} = -\sum_{k=0}^{\infty} \mu^k H^k M_0^{-1}(I - Q) + \sum_{k=1}^{\infty} \mu^{-k} S^{k-1} L_1^{-1} Q$$

в кольце $|\mu| > r$. Кроме того, аналогично можно установить существование операторов $G = L_0 M_0^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^0)$ и $T = M_1 L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^1)$ и получить разложение

$$(\mu L - M)^{-1} = -\sum_{k=0}^{\infty} \mu^k M_0^{-1} G^k (I - Q) + \sum_{k=1}^{\infty} \mu^{-k} L_1^{-1} T^{k-1} Q .$$

Определение 3 Точка ∞ называется *устранимой особой точкой, полюсом порядка* $p \in \mathbb{N}$, *существенно особой точкой* L-резольвенты оператора M, если соответственно $H \equiv \mathbb{O}$; $H^p \neq \mathbb{O}$, $H^{p+1} \equiv \mathbb{O}$; $H^q \neq \mathbb{O}$ $\forall q \in \mathbb{N}$.

Теорема 2 *Пусть оператор M L-регулярен, и точка ∞ является*

(i) существенно особой точкой L-резольвенты оператора M. Тогда M-корневой линеал оператора L содержится в $\mathfrak{U}^0$.

(ii) полюсом порядка $p \in \mathbb{N}$ L-резольвенты оператора M. Тогда M-корневой линеал оператора L совпадает с $\mathfrak{U}^0$ и состоит из M-присоединенных векторов оператора L высоты не больше p.

(iii) устранимой особой точкой L-резольвенты оператора M. Тогда $\ker L = \mathfrak{U}^0$, $\operatorname{im} L = \mathfrak{F}^1$, и любой собственный вектор оператора L не имеет M-присоединенных векторов.

В п.1.4 излагается теория регулярных пучков матриц Кронекера-Вейерштрасса и устанавливается связь этих результатов с нашими результатами.

В п.1.5 изучаются разрешающие группы операторов. Пусть оператор M L-регулярен, тогда уравнение $L\dot{u} = Mu$ можно редуцировать к паре эквивалентных ему уравнений

$$R_\alpha^L(M)\dot{u} = (\alpha L - M)^{-1} M u , \tag{8}$$

$$L_\alpha^L(M)\dot{f} = M(\alpha L - M)^{-1} f , \tag{9}$$

где $\alpha \in \rho^L(M)$.

Теорема 3 *Пусть оператор M L-регулярен. Тогда существует аналитическая разрешающая группа уравнения (8) (уравнения (9)).*

В п.1.6 Рассмотрены фазовые пространства.

Определение 4 Множество $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{V}$ называется *фазовым пространством* уравнения (8), если

(i) любое решение $v = v(t)$ уравнения (8), лежит в $\mathfrak{B}$, т.е. $v(t) \in \mathfrak{B}$ $\forall t \in \mathbb{R}$;

(ii) при любом $v_0 \in \mathfrak{B}$ существует единственное решение $v \in C^{\infty}(\mathbb{R}; \mathfrak{V})$ задачи Коши $v(0) = v_0$ для уравнения (8).

Теорема 4 *Пусть оператор M L-регулярен. Тогда фазовое пространство уравнения (9) совпадает с образом разрешающей группы (9).*

В п.1.7 Устанавливается разрешимость задачи Коши

$$u(0) = u_0 \tag{10}$$

для уравнения

$$L\dot{u} = Mu + f. \tag{11}$$

Вектор-функцию $u \in C^1((0,\tau);\mathfrak{U}) \cap ([0,\tau);\mathfrak{U})$ назовем *решением задачи* (10), (11), если она удовлетворяет уравнению (11) на $(0,\tau)$ и условию (10).

Пусть операторы $H = M_0^{-1}L_0$, $S = L_1^{-1}M_1$, векторы u^k, $u_0^k \in \mathfrak{U}^k$, $f^k \in \mathfrak{F}^k$, $k = 0, 1$. Пусть вектор-функция $f^0 \in C^p([0,\tau);\mathfrak{F})$, введем в рассмотрение множество

$$\mathfrak{M}_f = \left\{ u \in \mathfrak{U} : (\mathbb{I} - Q)\left(Mu + \sum_{q=0}^{p} G^q \frac{d^q}{dt^q} f^0(0) \right) \right\}.$$

Теорема 5 *Пусть оператор M L-регулярен, функция $f : [0,\tau) \to \mathbb{R}$ такова, что $f^0 \in C^p([0,\tau);\mathfrak{F}^0) \cap C^{p+1}((0,\tau);\mathfrak{F}^0)$, где p – порядок полюса в бесконечности L-резольвенты оператора M, а $f^1 \in C([0,\tau);\mathfrak{F}^1)$. Тогда для любого $u_0 \in \mathfrak{M}_f$ существует единственное решение $u \in C^1((0,\tau);\mathfrak{U}) \cap C([0,\tau);\mathfrak{U})$ задачи (10), (11), которое к тому же имеет вид*

$$u(t) = -\sum_{q=0}^{p} H^q M_0^{-1} \frac{d^q}{dt^q} f(t) + U^t u_0 + \int_0^t R^{t-s} f(s) ds. \tag{12}$$

Следствие 1 *Пусть дополнительно к условиям теоремы 5 существует оператор M^{-1}. Тогда*

$$\sum_{q=0}^{p} H^q M_0^{-1} \frac{d^q}{dt^q} f(t) = \sum_{q=0}^{p} H^q M^{-1} \frac{d^q}{dt^q} (\mathbb{I} - Q) f(t).$$

В п.1.8 рассматривается пример Леонтьева, где матрицы L и M имеют вид

$$L = \begin{bmatrix} \frac{7}{20} & \frac{1}{20} & \frac{21}{200} \\ \frac{1}{100} & \frac{103}{200} & \frac{8}{25} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{-1}{5} & \frac{-11}{20} \\ \frac{-7}{25} & \frac{10304189}{11996000} & \frac{-70836357}{119960000} \\ \frac{-4}{15} & \frac{-2}{5} & \frac{13}{15} \end{bmatrix}.$$

Находится их относительный спектр

$$\sigma^L(M) = \{0,2;2,7\}$$

и вычисляется фазовое пространство

$$\mathfrak{M}_f = \{u \in \mathfrak{U} : 4u_1 + 6u_2 = 13u_3 + 15f_3\}.$$

В заключение приводятся некоторые результаты счета без комментариев.

Во второй главе строится численный алгоритм решения задачи Коши. Пусть $\mathfrak{U}$ и $\mathfrak{F}$ – конечномерные линеалы, $\dim \mathfrak{U} = \dim \mathfrak{F}$; операторы $L, M \in \mathcal{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$, причем оператор M L-регулярен.

В п.2.1 изучаются свойства относительных p-резольвент. Пусть точки $\mu_q \in \rho^L(M)$, $q = 0,1,\ldots,p$. Тогда оператор-функции

$$R^L_{(\mu,p)}(M) = \prod_{q=0}^{p} R^L_{\mu_q}(M), \quad L^L_{(\mu,p)}(M) = \prod_{q=0}^{p} L^L_{\mu_q}(M)$$

называются соответственно *правой p-резольвентой* и *левой p-резольвентой* оператора M *относительно* оператора L (короче, *правой* (L,p)-*резольвентой* и *левой* (L,p)-*резольвентой* оператора M).

Теорема 6 *Пусть p – порядок полюса L-резольвенты оператора M в точке ∞. Тогда*

(i) $\ker R^L_{(\mu,p)}(M) \oplus \operatorname{im} R^L_{(\mu,p)}(M) = \mathfrak{U}$,

(ii) $\ker L^L_{(\mu,p)}(M) \oplus \operatorname{im} L^L_{(\mu,p)}(M) = \mathfrak{F}$.

Следствие 2 *Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда*

(i) операторы $L_k, M_k \in \mathcal{L}(\mathfrak{U}^k;\mathfrak{F}^k)$, $k = 0,1$;

(ii) существуют операторы $M_0^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^0;\mathfrak{U}^0)$, $L_1^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F}^1;\mathfrak{U}^1)$.

Основной результат **п.2.2** заключается в следующем

Теорема 7 *Пусть p – порядок полюса в точке ∞ L-резольвенты оператора M. Тогда*

$$(i) \qquad \lim_{k\to\infty}(kR_k^L(M))^{p+1} = P, \tag{13}$$

$$(ii) \qquad \lim_{k\to\infty}(kL_k^L(M))^{p+1} = Q, \tag{14}$$

где проекторы P и Q определены формулами (7).

Замечание 1 В численных расчетах всегда необходимо знать, с какого числа $k \in \mathbb{N}$ можно начинать считать приближенные проекторы P и Q. Рассмотрим многочлен $\det(\mu L - M) = a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + n$. Поскольку коэффициент $a_0 = \det L$, коэффициент a_1 состоит из слагаемых, каждое из которых есть произведение определителя одного из миноров матрицы L порядка $n-1$ на число, ..., коэффициент a_k состоит из слагаемых, каждое из которых есть произведение определителя одного из миноров матрицы L порядка $n-k$ на число, ..., коэффициент $a_n = \det(-M)$, то многочлен $\det(\mu L - M)$ имеет порядок не больший, чем $\operatorname{rank} L$. Итак, пусть $\det(\mu L - M) = a_q\mu^{n-q} + \ldots + a_n$, где $a_q \neq 0$, $q \leq \operatorname{rank} L$. Тогда при

$$k > \frac{1}{|a_q|}\sum_{k=q+1}^{n}|a_k| + 1 \tag{15}$$

мы не сможем оказаться даже вблизи точки L-спектра оператора M.

Замечание 2 Порядок полюса в точке ∞ L-резольвенты оператора M не может быть больше $\dim \mathfrak{U}$ (или $\dim \mathfrak{F}$). Поэтому в численных расчетах проекторов в формулах (13) и (14) показатель степени $p+1$ можно заменить на $\dim \mathfrak{U}$.

Основной результат **п.2.3** заключается в следующем

Теорема 8 *Пусть p – порядок полюса в точке ∞ L-резольвенты оператора M. Тогда*

$$(i) \qquad \lim_{k\to\infty}((L - \frac{t}{k(p+1)}M)^{-1}L)^{k(p+1)} = U^t, \tag{16}$$

$$(ii) \qquad \lim_{k\to\infty}(L(L-\frac{t}{k(p+1)}M)^{-1})^{k(p+1)} = F^t, \tag{17}$$

где группы $\{U^t : t \in \mathbb{R}\}$ *и* $\{F^t : t \in \mathbb{R}\}$ *определены в п.1.5.*

Основной результат **п.2.4** содержится в следущем

Теорема 9 *Пусть* p *– порядок полюса в точке* ∞ L*-резольвенты оператора* M*. Тогда*

$$\lim_{k\to\infty}((L-\frac{t}{k(p+1)}M)^{-1}L)^{k(p+1)-1}(L-\frac{t}{k(p+1)}M)^{-1} = R^t, \tag{18}$$

где семейство операторов $\{R^t : t \in \mathbb{R}\}$ *определено формулой (12).*

Основной результат **п.2.5** заключается в следущем

Теорема 10 *Пусть существует оператор* $M^{-1} \in \mathcal{L}(\mathfrak{F};\mathfrak{U})$*. Тогда для любого вектора* $f \in \mathfrak{F}$ *и любого вектора* $u_0 \in \mathfrak{U}$ *такого, что*

$$\begin{gathered} -\lim\nolimits_{k\to\infty}(\mathbb{I}_n - (kR_k^L(M))^n)u_0 = \\ \lim\nolimits_{k\to\infty} M^{-1}(\mathbb{I}_n - (kL_k^L(M))^n)f, \end{gathered} \tag{19}$$

существует единственное решение задачи (1), (2), которое к тому же имеет вид

$$\begin{gathered} u(t) = \lim\nolimits_{k\to\infty}((L-\tfrac{t}{kn}M)^{-1}L)^{kn}u_0 + \\ \lim\nolimits_{k\to\infty} M^{-1}(L(L-\tfrac{t}{kn}M)^{-1})^{kn}f - M^(- 1)f. \end{gathered} \tag{20}$$

В **п.2.6** обсуждаются некоторые оценки сходимости.

В третьей главе полученные результаты прилагаются к расчету экономической структуры коммунального хозяйства г. Еманжелинска.

В **п.3.1** приводится кратко историко-географическая и экономическая характеристика города.

В **п.3.2** по статистическим данным, предоставленным в администрации г. Еманжелинска, были составлены две матрицы. Матрица L – это матрица капитальных затрат, а матрица M – это матрица текущих затрат.

$$L = \begin{bmatrix} \frac{1}{50} & \frac{1}{75} & \frac{1}{125} & \frac{1}{100} \\ \frac{1}{25} & \frac{1}{100} & \frac{4}{175} & \frac{3}{125} \\ \frac{1}{200} & \frac{2}{75} & \frac{3}{100} & \frac{1}{125} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$M = \begin{bmatrix} \frac{34}{35} & \frac{-6}{125} & \frac{-3}{100} & \frac{-7}{125} \\ \frac{-3}{200} & \frac{32}{45} & \frac{-1}{100} & \frac{-2}{125} \\ \frac{-1}{25} & \frac{-1}{100} & \frac{3}{5} & \frac{-7}{50} \\ \frac{-3}{125} & \frac{-1}{150} & \frac{-9}{125} & \frac{23}{30} \end{bmatrix}.$$

И найдено фазовое пространство

$$\mathfrak{M} = \{u \in \mathfrak{U} : 575u_4 = 18u_1 + 5u_2 + 54u_3 + 750f_4\}.$$

В п.3.4 приведены некоторые прикидочные расчеты.

$$f1 = -60, f2 = -20, f3 = 0, f4 = 10$$

$$u01 = 50, u02 = 30, u03 = 20$$

$$50.$$

$$0$$

$$\left[\frac{612674}{12619}, \frac{325314}{12619}, \frac{338660}{12619}, \frac{125584842}{7255925}\right]$$

$$\frac{1}{12}$$

$$[66.95969954, 23.78090193, 31.57878539, 18.31205828]$$

$$\frac{1}{6}$$

[88.68356764, 19.86253999, 36.45457773, 19.41593759]

$$\frac{1}{4}$$

[114.5376482, 13.51647534, 41.48072659, 20.64212049]

$$\frac{1}{3}$$

[145.5413800, 4.10596032, 46.67702172, 22.01884142]

$$\frac{5}{12}$$

[182.9710459, −9.16682741, 52.06793992, 23.58141469]

$$\frac{1}{2}$$

[228.4245758, −27.30143123, 57.68382429, 25.37402038]

$$\frac{7}{12}$$

[283.9027008, −51.55002143, 63.56235952, 27.45194073]

$$\frac{2}{3}$$

[351.9105786, −83.48114832, 69.75041722, 29.88436036]

$$\frac{3}{4}$$

[435.5850683, −125.0595761, 76.30637053, 32.75787367]

$$\frac{5}{6}$$

$$[538.8541149,\ -178.7462661,\ 83.30298955,\ 36.18087682]$$

$$\frac{11}{12}$$

$$[666.6363511,\ -247.6235849,\ 90.83106883,\ 40.28906803]$$

$$1$$

$$[825.0910632,\ -335.5521072,\ 99.00397004,\ 45.25233562]$$

СПИСОК ПУБЛИКАЦИЙ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. *Брычев С.В.* Задача Коши для вырожденных систем обыкновенных дифференциальных уравнений // Рук. деп.ВИНИТИ, 2000, № 3637-В00 ДЕП.

2. *Брычев С.В.* Решения замкнутой системы уравнений Леонтьева // Межд. конф. "Дифференц. и интегр. уравн.". Одесса, 2000. С.39–40.

3. *Брычев С.В.* Замкнутая система уравнений межотраслевого баланса // Тез. докл. Четв. сиб. конг. прикл. и индустр. матем., ИНПРИМ - 2000. Новосибирск, 2000. С.46–47.

4. *Свиридюк Г.А., Брычев С.В.* О неотрицательных решениях системы Леонтьева // Вор. зимн. мат. шк. Воронеж, 1999. С. 178.

5. *Свиридюк Г.А., Брычев С.В.* Об одной модели межотраслевой экономики // Вор. вес. мат. шк. Воронеж, 1999. С. 291.

6. Свиридюк Г.А., Брычев С.В. О решениях системы уравнений Леонтьева // "Проблемы физ.-мат. образования в пед. вузах России на совр. этапе": Матер. Всеросс. науч.-практ. конф. Ч.2. Магнитогорск: МГПИ, 1999. С.30-31.

Подписано в печать 22.11.2000. Формат 60 × 84 1/16.
Бумага офсетная. Печать офсетная. Усл. печ. л. 1,0.
Уч.-изд. л. 1,0. Тираж 100 экз. Заказ 174.. Бесплатно.

Челябинский государственный университет
454021 Челябинск, ул. Братьев Кашириных, 129.

Полиграфический участок Издательского центра
Челябинского государственного университета
454021 Челябинск, ул. Молодогвардейцев, 57б.